Aufgabe 1737

Quelle: AHS Matura vom 14. Jänner 2020 - Teil-1-Aufgaben - 4. Aufgabe
Angabe mit freundlicher Genehmigung vom Bundesministerium für Bildung; Lösungsweg: Maths2Mind

---

Quadratische Gleichung

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + r \cdot x + s = 0 \text{ in } x \in \mathbb{R} \text{ mit } r, s \in \mathbb{R}$

- Lösungsfall 1: Die quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung.
- Lösungsfall 2: Die quadratische Gleichung hat nur eine reelle Lösung $x = -\frac{r}{2}$
- Lösungsfall 3: Die quadratische Gleichung hat die reellen Lösungen $x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -r$
- Lösungsfall 4: Die quadratische Gleichung hat die reellen Lösungen $x_1 = -\sqrt{-s} \text{ und } x_2 = \sqrt{-s}$

- Aussage A: $\frac{r^2}{4} = s$
- Aussage B: $\frac{r^2}{4} - s > 0 \text{ mit } r, s \neq 0$
- Aussage C: $r \in \mathbb{R},\ \ s > 0$
- Aussage D: $\mathrm{r} = 0;\ \ \mathrm{s} < 0$
- Aussage E: $r \neq 0;\ \ s = 0$
- Aussage F: $\mathrm{r} = 0;\ \ \mathrm{s} > 0$

Aufgabenstellung [0 / 0,5 / 1 P.] – Bearbeitungszeit < 5 Minuten

Ordnen Sie den vier Lösungsfällen 1, 2, 3 und 4 jeweils diejenige Aussage über die Parameter *r* und *s* (aus A bis F) zu, bei der stets der jeweilige Lösungsfall vorliegt.

Nütze diesen freien Platz, um die Aufgabe selbst zu rechnen:

Lösungsweg zur Aufgabe 1737

Der Koeffizient a vor dem quadratischen Glied ist 1. Es liegt daher die Normalform der quadratischen Gleichung vor. Für die rechnerische Lösung einer quadratischen Gleichung in Normalform mittels pq Formel gilt:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Quadratische Gleichungen haben, abhängig von der Diskriminante "D" 3 mögliche Lösungsfälle.

- D > 0 → 2 Lösungen in $\mathbb{R}$
- D = 0 → 1 (eigentlich 2 gleiche) Lösung in $\mathbb{R}$
- D < 0 → keine Lösung in $\mathbb{R}$, aber 2 konjugiert komplexe Lösungen in $\mathbb{C}$

Gemäß der Angabe lautet die Diskriminante $D = \left(\frac{r}{2}\right)^2 - s$

- **Lösungsfall 1**: Eine quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung, wenn die Diskriminante $D = \left(\frac{r}{2}\right)^2 - s$ kleiner als null ist. Wenn (r=0) und (s>0), dann ist die Diskriminante sicher negativ.
  Daher: **Lösungsfall 1 → Aussage F**
- **Lösungsfall 2**: Eine quadratische Gleichung hat nur eine reelle Lösung, wenn die Diskriminante D=0 ist. Wenn $\frac{r^2}{4} = s$, dann ist die Diskriminante sicher gleich null. Daher: **Lösungsfall 2 → Aussage A**
- **Lösungsfall 3**: Eine quadratische Gleichung soll je eine Lösung an der Stelle $x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -r$ haben.
  Gemäß dem Wurzelsatz von Vieta gilt:
  $p = r = -(x_1 + x_2) = -(0 - r) = r \to r = r \Rightarrow \text{triviale Aussage}$
  $\text{r} \neq 0 \text{ andernfalls, also } r = 0 \to \text{ x}^2 = -s = 0 \to x_{1,2} = 0 \neq L\{0, -r\}$
  $q = s = x_1 \cdot x_2 = 0 \cdot (-r) = 0 \to s = 0 \Rightarrow \text{Aussage E}$
  Daher **Lösungsfall 3 → Aussage E**
- **Lösungsfall 4**: Eine quadratische Gleichung soll die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-s}$ haben. Es muss $s < 0$ sein, denn dann ist der Wert unter der Wurzel auf Grund des „doppelten" Minus eine positive Zahl, und nur dann sind $x_{1,2}$ reelle Lösungen, andernfalls würden 2 konjugiert komplexe Lösungen in $\mathbb{C}$ vorliegen.
  Daher **Lösungsfall 4 → Aussage D**

Die richtige Lösung lautet:

- Lösungsfall 1 → **Aussage F**
- Lösungsfall 2 → **Aussage A**
- Lösungsfall 3 → **Aussage E**
- Lösungsfall 4 → **Aussage D**

Lösungsschlüssel:
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Lösungsfälle ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist. Bei zwei oder drei richtigen Zuordnungen ist ein halber Punkt zu geben.