Aufgabe 1639

Quelle: AHS Matura vom 20. September 2018 - Teil-1-Aufgaben - 2. Aufgabe
Angabe mit freundlicher Genehmigung vom Bundesministerium für Bildung; Lösungsweg: Maths2Mind

---

Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung

Gegeben ist eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + a \cdot x = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung [0 / 1 P.] – Bearbeitungszeit < 5 Minuten

Bestimmen Sie denjenigen Wert für a, für den die gegebene Gleichung die Lösungsmenge $L = \left\{ 0; \frac{6}{7} \right\}$ hat.

Nütze diesen freien Platz, um die Aufgabe selbst zu rechnen:

Lösungsweg zur Aufgabe 1639

Die in der Angabe gegebene Lösungsmenge $L=\left\{0;\frac{6}{7}\right\}$ bedeutet, dass die Funktion die der Gleichung $x^2+a\cdot x=0$ entspricht, an den Stellen $x_1=0$ und $x_2=\frac{6}{7}$ je eine Nullstelle hat.

1. Lösungsmöglichkeit:
Der **Wurzelsatz von Vieta** stellt den Zusammenhang zwischen den Variablen p und q auf der einen Seite und den Nullstellen x_1 und x_2 auf der anderen Seite dar.

$$p=-(x_1+x_2)$$

$$q=x_1\cdot x_2$$

Durch Einsetzen der beiden Nullstellen erhalten wir:

$$p=-\left(0+\frac{6}{7}\right)=-\frac{6}{7}\to a=-\frac{6}{7}$$

$$q=0\cdot\frac{6}{7}=0$$

Für $a=-\frac{6}{7}$ hat die gegebene Gleichung $x^2-\frac{6}{7}\cdot x=0$ die Lösungsmenge $L=\left\{0;\frac{6}{7}\right\}$.

2. Lösungsmöglichkeit:

Bei der gegebenen Gleichung handelt es sich um eine quadratische Gleichung, die 2 gegebene Lösungen $x_1=0$ und $x_2=6/7$ hat.

Das Spezielle an dieser quadratischen Gleichung ist, dass sie kein konstantes Glied hat. Wir können daher faktorisieren, indem wir x herausheben:

$$x^2 + a \cdot x = 0$$
$$x \cdot (x + a) = 0$$

Der **Satz vom Nullprodukt** besagt, dass ein Produkt immer dann null ist, wenn zumindest einer der beiden Faktoren null ist.

Die erste Lösung erhält man, wenn den ersten Faktor gleich Null setzt.

$$x = 0 \to 0 = 0$$

Dann besagt die Gleichung, dass Null gleich Null ist, was eine triviale Aussage ist und uns auf der Suche nach dem Koeffizienten „a" nicht weiterbringt.

Die zweite bzw. die eigentlich gesuchte Lösung erhält man, wenn man den zweiten Faktor, also den Klammerausdruck Null setzt:

$$(x + a) = 0$$
$$x_2 = \frac{6}{7}$$
$$\left(\frac{6}{7} + a\right) = 0 \to a = -\frac{6}{7}$$

Für $a = -\frac{6}{7}$ hat die gegebene Gleichung die Lösungsmenge $L = \left\{0; \frac{6}{7}\right\}$.

Die richtige Lösung lautet:

Für $a = -\frac{6}{7}$ hat die gegebene Gleichung die Lösungsmenge $L = \left\{0; \frac{6}{7}\right\}$.

Lösungsschlüssel:
Ein Punkt für die richtige Lösung.