Aufgabe 1490

Quelle: AHS Matura vom 10. Mai 2016 - Teil-1-Aufgaben - 4. Aufgabe
Angabe mit freundlicher Genehmigung vom Bundesministerium für Bildung; Lösungsweg: Maths2Mind

---

Quadratische Gleichung

Gegeben ist die quadratische Gleichung
$x^2 + p \cdot x - 12 = 0$

Aufgabenstellung [0 / 1 P.] – Bearbeitungszeit < 5 Minuten

Bestimmen Sie denjenigen Wert für p, für den die Gleichung die Lösungsmenge $L = \{-2; 6\}$ hat!

Nütze diesen freien Platz, um die Aufgabe selbst zu rechnen:

Lösungsweg zur Aufgabe 1490

Die in der Angabe gegebene Lösungsmenge $L=\{-2;6\}$ bedeutet, dass die Funktion die der Gleichung $x^2+p\cdot x-12=0$ entspricht, an den Stellen $x_1=-2$ und $x_2=6$ je eine Nullstelle hat.

1. Lösungsweg:
Der Wurzelsatz von Vieta stellt den Zusammenhang zwischen den Variablen p und q auf der einen Seite und den Nullstellen z_1 und z_2 auf der anderen Seite dar.
$p=-(z_1+z_2)$ und $q=z_1\cdot z_2$

Durch Einsetzen der beiden gegebenen Lösungen erhalten wir genial einfach das gesuchte p.
$p=-(z_1+z_2)=-(-2+6)=-4$

2. Lösungsweg

Wir kennen die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung mit $x_1=-2$ und $x_2=6$. Da vor dem quadratischen Term eine "1" steht, handelt es sich um eine quadratische Gleichung in Normalform, die wir mittels der „kleinen Lösungsformel" lösen werden:

$$x^2+px+q=0 \text{ mit } x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Jede quadratische Gleichung hat 2 Lösungen. Nur wenn die Diskriminante $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ größer gleich Null ist, erhalten wir reale und keine konjugiert komplexen Lösungen. Daher muss die größere Lösung $x_2=6$ zu jener Lösung mit dem „+" vor der Wurzel gehören und die kleinere Lösung $x_1=-2$ zu jener Lösung mit dem „-" vor der Wurzel.

$$\begin{array}{lcccccc} I: & 6 & = & -\frac{p}{2} & + & \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \\ II: & -2 & = & -\frac{p}{2} & - & \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \\ \hline I+II & 4 & = & -2\frac{p}{2} & + & 0 \end{array}$$

somit:

$4=-p \rightarrow p=-4$

Die richtige Lösung lautet:

$p=-4$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.