Aufgabe 1347

Quelle: AHS Matura vom 09. Mai 2014 - Teil-1-Aufgaben - 3. Aufgabe
Angabe mit freundlicher Genehmigung vom Bundesministerium für Bildung; Lösungsweg: Maths2Mind

---

Quadratische Gleichung

Die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung $r \cdot x^2 + s \cdot x + t = 0$ in der Menge der reellen Zahlen hängt von den Koeffizienten r, s und t ab.

Aufgabenstellung [0 / 1 P.] – Bearbeitungszeit < 5 Minuten

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die quadratische Gleichung $r \cdot x^2 + s \cdot x + t = 0$ hat genau dann für alle $r \neq 0$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$ **Satzteil 1**, wenn **Satzteil 2** gilt.

- Satzteil 1_1: zwei reelle Lösungen
- Satzteil 1_2: keine reelle Lösung
- Satzteil 1_3: genau eine reelle Lösung

- Satzteil 2_1: $r^2 - 4st > 0$
- Satzteil 2_2: $t^2 = 4rs$
- Satzteil 2_3: $s^2 - 4rt > 0$

Nütze diesen freien Platz, um die Aufgabe selbst zu rechnen:

Lösungsweg zur Aufgabe 1347

In der Angabe hat man die "übliche" Schreibweise mit a, b und c durch r, s und t ersetzt, wobei:
$rx^2 + sx + t = 0 \leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$

Für die rechnerische Lösung einer allgemeinen quadratischen Gleichung mittels abc Formel gilt:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Quadratische Gleichungen haben, abhängig von der Diskriminante "D" 3 mögliche Lösungsfälle.

- D > 0 → 2 Lösungen in $\mathbb{R}$
- D = 0 → 1 (eigentlich 2 gleiche) Lösung in $\mathbb{R}$
- D < 0 → keine Lösung in $\mathbb{R}$, aber 2 konjugiert komplexe Lösungen in $\mathbb{C}$

Wir müssen die Diskriminante aus der abc Formel untersuchen, wobei hier wegen a=r, b=s und c=t wie folgt gilt: $D = b^2 - 4ac \triangleq s^2 - 4rt$

Wir erkennen sofort, dass nur Satzteil 2_3 $s^2 - 4rt > 0$ die Diskriminante zu dieser Gleichung ist, während Satzteil 2_1 und 2_2 sinnlose Terme sind, die wir nicht weiter betrachten müssen.

Weiters erkennen wir, dass $s^2 - 4rt > 0$ einer Diskriminante größer Null entspricht und daher aus den 3 möglichen Lösungsfällen die Option „2 Lösungen in $\mathbb{R}$" also Satzteil 1_1 als richtig zu wählen ist.

Die quadratische Gleichung $r \cdot x^2 + s \cdot x + t = 0$ hat genau dann **zwei reelle Lösungen** für alle $r \neq 0 \text{ mit } r,s,t \in \mathbb{R}$, wenn $s^2 - 4rt > 0$ gilt.

Die richtige Lösung lautet:

Die quadratische Gleichung $r \cdot x^2 + s \cdot x + t = 0$ hat genau dann **zwei reelle Lösungen** für alle $r \neq 0 \text{ mit } r,s,t \in \mathbb{R}$, wenn $s^2 - 4rt > 0$ gilt.

Lösungsschlüssel:

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn für beide Lücken jeweils die zutreffende Antwortmöglichkeit „Satzteil 1_1" und „Satzteil 2_3" angekreuzt ist.