



Aufgabe 1492

Quelle: AHS Matura vom 10. Mai 2016 - Teil-1-Aufgaben - 2. Aufgabe

Angabe mit freundlicher Genehmigung vom Bundesministerium für Bildung; Lösungsweg: Maths2Mind

Äquivalenzumformung

Nicht jede Umformung einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

$$x^2 - 5x = 0 \quad |:x$$

$$x - 5 = 0$$

Aufgabenstellung [0 / 1 P.] – Bearbeitungszeit < 5 Minuten

Erklären Sie konkret auf das oben angegebene Beispiel bezogen, warum es sich bei der durchgeführten Umformung um keine Äquivalenzumformung handelt! Die Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen.

Nütze diesen freien Platz, um die Aufgabe selbst zu rechnen:



Lösungsweg zur Aufgabe 1492

Bei der Division durch x würde eine der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung verloren gehen, daher ist eine Division durch x keine Äquivalenzumformung.

Detaillierter:

Bei Äquivalenzumformungen werden beide Seiten einer Ungleichung / Gleichung so verändert, dass die getroffene Aussage erhalten bleibt. Es muss auch möglich sein, die ursprüngliche Aussage durch eine inverse Umformung der umgeformten Gleichung wieder zurückzugewinnen. Äquivalenz bedeutet, dass die ursprüngliche und die umgeformte Gleichung dieselbe Lösungsmenge haben.

Quadratische Gleichungen haben immer 2 Lösungen. Es kann sich dabei allerdings auch um konjugiert komplexe Lösungen handeln.

Nicht erforderlich, aber eine gute Fingerübung:

Wir ermitteln mittels pq-Formel die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 5x = 0$$

$$p = -5; \quad q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1,2} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 0} = 2,5 \pm 2,5$$

$$L = \{0, 5\}$$

Die Gleichung $x - 5 = 0$ hat aber nur mehr eine Lösung, nämlich: $x = 5$. Somit besteht deren Lösungsmenge nur mehr aus 1 Element: $L = \{5\}$

Durch die durchgeführte Umformung wurde die Lösungsmenge also verändert, daher ist die Division durch die Variable x keine Äquivalenzumformung.

oder

Bei der Division durch x würde im Fall $x = 0$ durch Null dividiert werden, was keine zulässige Rechenoperation ist.

Die richtige Lösung lautet:

Bei der Division durch x würde eine der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung verloren gehen, daher ist eine Division durch x keine Äquivalenzumformung.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erklärung.