Zahlensysteme

In dieser Mikro-Lerneinheit lernst du die Entwicklung der Zahlensysteme von den ersten Strichlisten in der Jungsteinzeit, über das sumerische Stellenwertsystem, die geometrisch geprägte alt-griechische Mathematik, gewisse Rückschritte beim römischen Zahlensystem, welches kein Stellenwertsystem ist, sowie die arabische Ziffernschreibweise, welche die Entwicklung der modernen Mathematik ermöglichte. Wir gehen auf die Bedeutung von Zahl und Ziffer ein. Besprechen das heutige Dezimalsystem als Stellenwertsystem und zeigen die Visualisierung von Zahlen am Zahlenstrahl, der Zahlengerade und in der gaußschen Zahlenebene. Abschließend gehen wir kurz auf die für Menschen unlesbaren, weil auf Maschinenlesbarkeit optimierten, Zahlencodes aus dem Alltag ein.

Der Botton „Wissenspfad" auf dem E-Learning-Portal maths2mind.com ermöglicht es dir, das Wissen jeder Lerneinheit zu verbreitern und zu vertiefen. Dort findest du auch zahlreiche durchgerechnete Aufgaben.

Autor: DI Andreas Dungl
Letzte Bearbeitung: 10.2023
Lernzeit: <45 Minuten

Zahlensysteme

Erste Strichlisten gehen auf die Jungsteinzeit zurück. Kerben, geritzt in Holz oder Knochen, die 20.000 Jahre und älter sind und aus Afrika stammen, stellen wohl die ersten mathematischen Aufzeichnungen in Form von Strichlisten dar. Vermutlich hat man mit ihnen versucht, Informationen dauerhaft festzuhalten.

Aus den Strichlisten entwickelten sich Zahlensysteme. Zahlensystemen unterscheidet man in solche ohne bzw. in solche mit Stellenwertsystem.

- Das römische Zahlensystem hat kein Stellenwertsystem, da der Zahlenwert durch Addition oder Subtraktion der Ziffern ermittelt wird. Es ist sehr unpraktisch mit dem römischen Zahlensystem zu rechnen.

- Ein Stellenwertsystem ist ein Zahlensystem, in dem der Wert einer Ziffer von der Position in einer Zahl abhängt. Ein Stellenwertsystem ermöglicht eine leistungsfähige Mathematik. 3000 Jahre vor den Römern hatten die Sumerer und dann die Babylonier bereits ein Stellenwertsystem zur Basis 60, heute rechnen wir mit einen Stellenwertsystem zur Basis 10, dem Dezimalsystem. Die Unterteilung bei der Zeitmessung, in der 1 Stunde 60 Minuten und 1 Minute 60 Sekunden hat und die Unterteilung bei Winkeln, wo ein Vollkreis 360 Grad und ein Grad 60 Minuten und 1 Minute 60 Sekunden hat, zeigen, dass 60-er Systeme heute noch eine Bedeutung haben.

Sumerisches Zahlensystem

3500 v.Chr. waren es die Sumerer, eine frühe Hochkultur im heutigen Iran und Irak, welche die Strichlisten zu einem ersten Zahlensystem weiterentwickelten. Dieses Zahlensystem wurde später von den Babyloniern übernommen. In ihrer Keilschrift einwickelten sie ein Sexagesimalsystem, auch Hexagesimalsystem genannt. Es handelt sich dabei um ein Stellenwertsystem zur Basis 60, dh es gibt 60 verschiedene Ziffern. Sie kamen dabei mit nur 2 Symbolen aus, die innerhalb einer Stelle hintereinander gesetzt wurden:

- Ein Symbol "I" für die Zahl 1, welches bis zu 9 mal wiederholt wurde. 8=IIIIIIII Achtung: Es handelt sich um nur 1 Stelle
- Ein Symbol "<" für die Zahl 10, welches bis zu 5 mal wiederholt wurde. 38=<<<IIIIIIII Achtung: Es handelt sich um nur 1 Stelle

Damit konnte man mit einer Stelle die Zahlen 1 bis 59 darstellen. Erst ab der Zahl 60 wurde eine 2. Stelle und ab der Zahl 3600 wurde eine 3. Stelle verwendet.

- Die 3 Stellen der Zahl 6913 sehen also wie folgt aus: 6913=(1*3600)+(55*60)+(1*13) → I <<<<<IIIII <III Achtung: Es handelt sich um nur 3 Stellen

---

Griechische Mathematik

Die alten Griechen verwendeten in der Mathematik vor allem geometrische Methoden und Brüche, als das Verhältnis zweier ganzer Zahlen. Pythagoras lebte etwa 600 v. Chr. und war Mathematiker und Philosoph. Hippasos entdeckte die irrationalen Zahlen, also Zahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen. 300 Jahre nach Pythagoras schuf Euclid, mit dem Lehrbuch "Elemente", das erste grundlegende Lehrbuch der Geometrie und legte damit den Grundstein für geometrische Formen, Axiome und Beweise, wobei die Beweise damals speziell auf geometrischen Beweisen basierten. Pythagoras formulierte das nach ihm benannte Theorem über rechtwinkelige Dreiecke, Euclid formalisierte und bewies es, wodurch aus dem Theorem ein Lehrsatz wurde. Archimedes approximierte um 240 v. Chr. mit Hilfe geometrischer Methoden die Kreiszahl Pi durch Approximation durch ein 96-Eck auf das Intervall $\left[3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}\right] \approx [3{,}1408 < 3{,}14159265; < 3{,}1428]$ genau und zeigte, dass man die Genauigkeit durch eine Annäherung mit Polygonen mit mehr Ecken steigern könne.

Griechisches Alphabet

Bedeutsam in der modernen Mathematik ist das griechische Alphabet. Das griechische Alphabet hat sich im Laufe der Jahrtausende nicht verändert. Das moderne griechische Alphabet enthält zusätzliche Buchstaben wie Eta, Theta, Phi und Chi, die es im antiken griechischen Alphabet nicht gegeben hat. Natürlich wurde und wird das griechische Alphabet von den Griechen zum Schreiben verwendet, während es in den modernen Naturwissenschaften als mathematische Variable oder als Bezeichner einer physikalischen Größe Verwendung findet.

Beispiele für den Einsatz von griechischen Buchstaben als **Variable**

- Alpha, Beta und Gamma werden bevorzugt für Winkel im Dreieck verwendet
- Delta wird oft für Differenzen, Abweichungen oder Änderungen verwendet
- Epsilon wird für kleine Abstände verwendet
- Lambda wird als Skalar in der Vektorrechnung verwendet

Beispiel für den Einsatz von griechischen Buchstaben als **Konstante**

- Pi steht für das Verhältnis von Kreisumfang und Kreisdurchmesser

Beispiel für den Einsatz von griechischen Buchstaben als **physikalische Größe**

- Psi wird in der Quantenmechanik für die Wellenfunktion eines Teilchens verwendet
- Omega steht für die Kreisfrequenz bei periodischen Schwingungen

Name	Großbuchstabe	Kleinbuchstabe
Alpha	A	α
Beta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Theta	Θ	θ
Iota	I	ι
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
My	M	μ
Ny	N	ν
Xi	Ξ	ξ
Omikron	O	o
Pi	Π	π

Rho	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Ypsilon	Υ	υ
Phi	Φ	φ
Chi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

Römische Zahlen

Die römischen Zahlen stellen ein altes Zahlensystem dar. Es stammt aus der Zeit des Römischen Reichs am Anfang unserer Zeitrechnung und war in Europa über 1000 Jahre in Verwendung. Die in den römischen Zahlen nicht enthaltene Zahl "0" erreichte Zentraleuropa erst im 12. Jahrhundert. In Indien war die Null schon 300 Jahre v. Chr. bekannt. Obwohl es sich um ein Zahlensystem handelt, werden Buchstaben des lateinischen Alphabets verwendet.

Im Unterschied zu den uns heute vertrauten Zahlensystemen (Binär- Hexadezimal-, Dezimalsystem) gibt es bei römischen Zahlen keinen Stellenwert, da der Zahlenwert durch Addition oder Subtraktion der Ziffern ermittelt wird. D.h. die Wertigkeit einer Ziffer hängt nicht von ihrer Position in der Zahl ab. (z.B.: 6=VI; 7=VII; 8=VIII; Das I ist also immer 1 wert, egal an welcher Stelle in der Zahl es steht). In Römischen Zahlen sind die uns vertrauten 10 Ziffern (0 bis 9) durch 7 Buchstaben repräsentiert (I, V, X, L, C, D, M), wobei es keine Null gibt.

Römische Zahlen werden von links nach rechts gelesen und die Werte der Ziffern werden addiert, es sei denn, ein kleinerer Wert steht vor einem größeren Wert, dann wird subtrahiert. Eine römische Zahl wird gebildet, indem man die römischen Ziffern beginnend mit der größten Ziffer in absteigender Wertigkeit hintereinander schreibt. Die Summe der Ziffern entspricht dann der Zahl. Damit nicht mehr als 3 idente Ziffern hinter einander angeschrieben werden, wird in diesen Fällen eine Ziffer mit geringerem Wert vor einer Ziffer mit höherem Wert geschrieben (Falsch: 9=VIIII; Richtig: 9=IX) . Durch diese Subtraktionsregel genannte Einschränkung, kann man mit römischen Ziffern nur die Menge der natürlichen Zahlen zwischen 1 bis 3999 darstellen (MMIM oder MMMCMXCIX).

Mit römischen Zahlen kann man leider nicht einfach und praktisch schriftlich rechnen, weshalb die Römer als Rechenhilfe für Addition und Subtraktion den Abakus verwendet haben. Der Abakus besteht aus einem Rahmen mit Stäben und Kugeln. Erst durch die indische bzw. arabische Ziffernschreibweise und dem Dezimalsystem wurde schriftliches Rechnen einfach möglich. Damit verschwanden die römischen Zahlen und werden heute meist nur aus ästhetischen Gründen, etwa auf Ziffernblätter, verwendet

Römische Ziffer	**Arabische Zahl** (Ursprung in Indien)
fehlt	0
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Für die römische Ziffer mit dem Dezimalwert 5000, 10 000 usw. gibt es keine einheitliche Regel.

Umrechnung römischer Zahlen in Dezimalzahlen

Ausgehend vom Zeichen mit der römischen Ziffer mit dem höchsten Wert addiert man die einzelnen Zeichen.

Beispiel:

- MMXXII → 1000 + 1000 + 10 + 10 + 1 + 1=2022
- MMMCMXCIX → 1000 + 1000 + 1000 + 1000-100 + 100-10 + 10-1 = 3999
- Beispiel 1959 → M + CM + L + IX = 1000 + 1000-100 + 50 + 10-1

Arabische Ziffernschreibweise und die Entwicklung der modernen Mathematik

Die arabische Ziffernschreibweise war eine Weiterentwicklung der Zahlensysteme auf Babylonien (3000 v. Chr.) und Indien (500 v. Chr.) . Aus Indien stammte die Verwendung von "0" und die heutige Schreibweise der Ziffern 1,2,3, ... Das indische Wissen verbreitete sich über die Seidenstraße nach Persien und Arabien. Im 10. und 11. Jahrhundert wurden als Folge der Übersetzung arabischer mathematischer Werke, die arabische Ziffernschreibweise auch in Europa bekannt. Entscheidend für deren Einführung in S-Europa war 1202 das Werk "Liber Abaci - Das Buch der Abakusrechnung" des italienischen Mathematikers Fibonacci. Europaweit hat sich die arabische Ziffernschreibweise erst im 15. Jahrhundert durchgesetzt. Durch die Ablösung der römischen Zahlen und durch die Verwendung der Ziffer "0" wurde eine leistungsfähige Mathematik erst möglich.

Der Verbreitung der Mathematik in Europa wurde durch die Erfindung des Buchdrucks um 1440 durch Johannes Gutenberg Vorschub geleistet. Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibnitz revolutionierten die Mathematik durch die Entdeckung der Infinitesimalrechnung, bei der mit unendlich kleinen Abweichungen gerechnet wurden und welche die heutige

Differenzial- und Integralrechnung umfasst und somit die Grundlage der Analysis bilden. Im 18. Jahrhundert trug Euler maßgeblich zur Entwicklung der Zahlentheorie bei, während im 19. Jahrhundert Carl Friedrich Gauß, Janos Bolyai und Nikolai Lobatschewski die Arbeiten von Euclid über die flache Geometrie durch die nichteuklidische Geometrie erweiterten,in dem sie das Parallelenaxiom negierten.

Zahl bzw. Ziffer

Jede natürliche **Zahl** besteht aus einer oder mehreren **Ziffern**. Jede Ziffer in einer Zahl hat einen **Ziffernwert** und einen **Stellenwert,** der vom jeweiligen Zahlensystem abhängt.
Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Stellenwert

Die additive Wertigkeit einer Ziffer hängt von ihrer Position in der Zahl ab. Uns ist das Zehnersystem besonders vertraut, aber gebräuchlich sind auch das Binärsystem oder das Hexadezimalsystem

Beispiel:
2.345,67 im Dezimalsystem
2 =Tausenderstelle, 3=Hunderterstelle, 4=Zehnerstelle,5= Einerstelle, 6=erste Nachkommastelle (=Zehntel), 7=zweite Nachkommastelle (=Hundertstel)

Stellenwertsysteme

Stellenwertsystem legen fest, welche Ziffernwerte eine Ziffer in einer Zahl annehmen darf und legen deren Stellenwert fest. Das gängigste Stellenwertsystem ist das Dezimalsystem.

Zahlenstrahl

Der Zahlenstrahl ist eine von Null ausgehende Halbgerade, die der Veranschaulichung der natürlichen Zahlen dient, wobei jeder Zahl ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet wird.

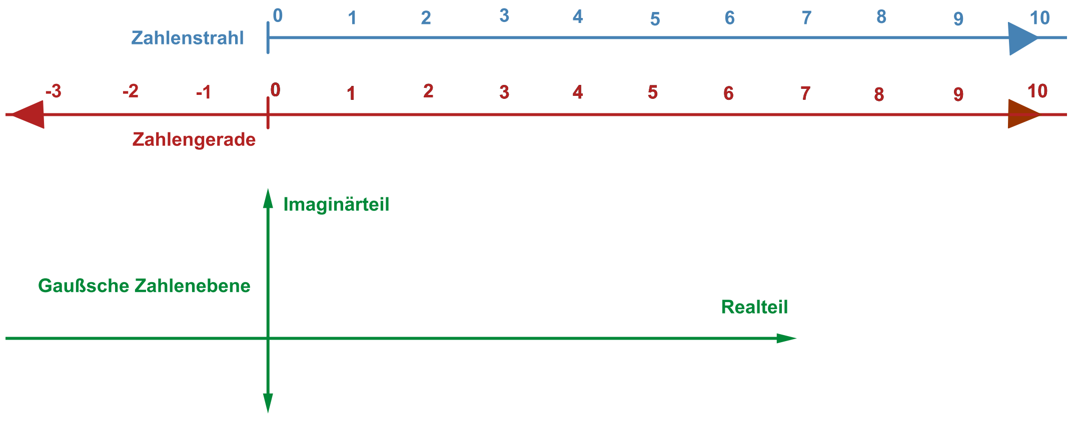
- **Vorgänger**: Von zwei natürlichen Zahlen steht die kleinere Zahl weiter links als die größere Zahl. Jede Zahl hat einen um eins kleineren Vorgänger (mit Ausnahme von Null)
- **Nachfolger**: Von zwei natürlichen Zahlen steht die größere Zahl weiter rechst als die kleinere Zahl. Jede Zahl hat einen um eins größeren Nachfolger.

Zahlengerade

Die Zahlengerade dient der Veranschaulichung reeller Zahlen, indem sie jeder reellen Zahl einen Punkt auf der Zahlengeraden zuordnet. Die Zahlengerade erweitert den Zahlenstrahl nach links und somit um die negativen Zahlen.

Gaußsche Zahlenebene

Die Gaußsche Zahlenebene dient der Veranschaulichung der komplexen Zahlen, wobei jeder Zahl ein Punkt in der Gaußschen Zahlenebene (Reale Achse und Imaginäre Achse) zugeordnet ist.



Darstellung von Zahlen als Tabelle

Eine Tabelle ist eine systematische Darstellung von Texten und Daten, aufgeteilt in Zeilen und Spalten.

Beispiel

Fahrzeugart	**Bestand in %**
PKW	72%
Zweiräder	11,8%
LKW	7,1%
Sonstige Kraftfahrzeuge	9,1%

Quelle: Statistik Austria, KFZ-Bestand 19.02.2020

Maschinenlesbare Darstellungen von Zahlencodes aus dem Alltag

Maschinenlesbare Darstellungen, von GS1 (Global Standards 1) normiert

- **1-Dimensionale Codes** sind als Strichcode, der in 1 Richtung beschrieben ist, ausgeführt
    - **EAN** (European Article Number) verschlüsselt eine (8, besser) 13-stellige Artikelnummer GTIN (Global Trade Item Number), die sich aus Ländercode, Unternehmenscode und Artikelnummer sowie Prüfziffer zusammensetzt.
    - **UPC-A** (Universal Product Code, speziell für USA) verschlüsselt eine 12-stellige Artikelnummer GTIN (Global Trade Item Nuber).
    - **DataBar** verschlüsselt als verlängerter EAN neben der GTIN auch zusätzliche Angaben, wie Stückzahl, Gewicht, Preis usw. und eignet sich speziell für Handelseinheiten

- **2-Dimensionale Codes** sind als Matrixcode, der in 2 Richtungen beschrieben ist, ausgeführt
    - **QR-Code** (Quick Response) für Marketing oder zur Registrierung bei Events, arbeitet mit URI, etwa einer URL, welche auf eine Webseite verweist, für 7.089 Zahlen oder 4.296 alphanumerischen Zeichen. Nur vom Herausgeber interpretierbar. Erfordert einen kamerabasierten Scanner, für Laserscanner nicht lesbar, 3 L-förmig angeordnete Quadrate an den Ecken markieren die Leserichtung

- **DataMatrix Code** Arbeitet mit Element Strings, bestehend aus genormten Identifikationsnummern (für Gewicht, Ablaufdatum, zu verkaufen bis Datum,..) und den zugehörigen Informationen. Die Anzahl der kodierbaren Zeichen hängt von der Größe vom Viereck ab und liegt bei einer Matrixgröße von 132x132 bei 3.116 Zahlen oder 2.335 alphanumerischen Zeichen. Die Dekodierung ist standardisiert. Erfordert einen kamerabsierten Scanner, für Laserscanner nicht lesbar, 2 außen angeordnete L-förmige Linenpaare (durchgängig, bzw strichliert) markieren die Leserichtung
- **DotCode** ist ein 2 dimensionaler Punktcode mit entweder fester Höhe und variabler Breite, die mit dem Datenumfang variiert, oder umgekehrt.