Logarithmen - Rechenregeln

In dieser Mikro-Lerneinheit lernst du die Rechenregeln für Logarithmen kennen. Vor der Erfindung von Computer Algebra Systemen (CAS) ermöglichten es diese Regeln in Verbindung mit Logarithmentafeln, den Grad einer Rechenoperation zu erniedrigen, wodurch komplizierte Berechnungen schneller und mit weniger Rechenfehlern durchgeführt werden konnten. Auch heute noch helfen Logarithmen bei der Lösung von Exponentialgleichungen.

Der Botton „Wissenspfad" auf dem E-Learning-Portal maths2mind.com ermöglicht es dir, das Wissen jeder Lerneinheit zu verbreitern und zu vertiefen. Dort findest du auch zahlreiche durchgerechnete Aufgaben.

Autor: DI Andreas Dungl
Letzte Bearbeitung: 08.2023
Lernzeit: <45 Minuten

Grundlegende Rechenregeln für Logarithmen

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a \frac{1}{a} = -1$$
$$\log_a a^n = n$$
$$\log_a a^x = x$$
$$a^{t_1} = a^{t_2} \Leftrightarrow t_1 = t_2 \text{ für a>0 und a} \neq 1$$

Bei der Verwendung von Taschenrechnern ist folgender Zusammenhang sehr nützlich, da er eine Möglichkeit bietet, allgemeine Logarithmen mit Hilfe der auf jedem Taschenrechner vorhandenen natürlichen Logarithmen zu berechnen:

$$x = \log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Die Rechenregeln für Logarithmen erlauben es, den "Grad einer Rechenoperation" zu "erniedrigen".

- Aus Potenzieren bzw. Radizieren wird Multiplizieren bzw. Dividieren.
- Aus Multiplikation bzw. Division werden Addition bzw. Subtraktion.

Dies war vor der Erfindung vom Taschenrechner vor allem in der Astronomie und der Seefahrt von so großer Bedeutung, dass Mathematiker ihr ganzes Berufsleben damit verbrachten Logarithmustabellen zu erstellen, um es den Astronomen und Navigatoren zu ermöglichen, einfache Multiplikationen oder Divisionen, statt aufwendig Potenzen bzw. Wurzeln zu berechnen. Noch heute löst man Exponentialgleichungen, indem man beide Seiten der Gleichung logarithmiert.

Multiplikation → Addition:
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

Division → Subtraktion:
$\log_a \frac{u}{v} = \log_a(u) - \log_a(v)$

Potenzieren → Multiplikation:
$\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$

Wurzelziehen → Division:
$\log_a(\sqrt[r]{u}) = \frac{1}{r} \cdot \log_a(u)$

Logarithmus eines Produkts

Der Logarithmus eines Produkts, ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Faktoren. Rechnet man mit Logarithmen führt man eine Multiplikation auf eine wesentlich einfachere Addition zurück.

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

Logarithmus eines Quotienten

Der Logarithmus eines Quotienten, ist gleich der Differenz der Logarithmen seines Dividenden und seines Divisors. Rechnet man mit Logarithmen führt man eine Division auf eine wesentlich einfachere Subtraktion zurück.

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = -\log_a\left(\frac{v}{u}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

Logarithmus einer Potenz

Der Logarithmus einer Potenz, ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus seiner Basis. Rechnet man mit Logarithmen führt man das Potenzieren von ur auf eine wesentlich einfachere Multiplikation zurück.

$$\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$$

Logarithmus einer Wurzel

Der Logarithmus einer Wurzel, ist gleich dem Quotienten aus den Logarithmen seines Radikanden und aus dem Wert des Wurzelexponenten. Rechnet man mit Logarithmen führt man das Wurzelziehen auf eine wesentlich einfachere Division zurück

$$\log_a\left(\sqrt[n]{u}\right) = \frac{\log_a(u)}{n}$$

Logarithmus dessen Basis ein Quotient ist

Der Logarithmus dessen Basis ein Quotient ist, ist gleich dem mit -1 multiplizierten Logarithmus, dessen Basis der Kehrwert des Quotienten ist.

$$\log_{\frac{1}{a}}(u) = -\log_a(u)$$

Zusammenhang zwischen e-Funktion und natürlichem Logarithmus

Der natürliche Logarithmus ln(x) ist die inverse Funktion zur e-Funktion. Das bedeutet, wenn man die e-Funktion und den natürlichen Logarithmus aufeinander anwendet, heben sie sich gegenseitig auf:

$$e^{\ln(x)} = x = \ln\left(e^x\right)$$

Beispiel zur Lösung von Exponentialgleichungen mit Hilfe von Logarithmen

Auf folgende Weise helfen Logarithmen bei der Lösung von Exponentialgleichungen

$$3^x = 5 \quad \left|\text{beide Seiten logarithmieren}\right.$$

Die Basis kann frei gewählt werden, da die Rechenregeln für jede beliebige Basis gelten

$$\ln\left(3^x\right) = \ln(5)$$

mit:

$$\log_a\left(u^r\right) = r \cdot \log_a(u)$$

ergibt sich:

$x \cdot \ln(3) = \ln(5) \quad \left|: \ln(3)\right.$

$x = \dfrac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1{,}465$