Logarithmen - Grundbegriffe

In dieser Mikro-Lerneinheit lernst du wofür Logarithmen nützlich sind, deren Unterscheidung nach ihrer Basis, sowie die Beziehungen zwischen dem allgemeinen, dem dekadischen, dem natürlichen und dem binären Logarithmus. Wir gehen zudem auf Logarithmustafeln und logarithmische Skalen ein.

Der Botton „Wissenspfad" auf dem E-Learning-Portal maths2mind.com ermöglicht es dir, das Wissen jeder Lerneinheit zu verbreitern und zu vertiefen. Dort findest du auch zahlreiche durchgerechnete Aufgaben.

Autor: DI Andreas Dungl
Letzte Bearbeitung: 08.2023
Lernzeit: <45 Minuten

Logarithmieren

Logarithmieren ermöglicht es, x zu errechnen, wenn x der Exponent einer Potenz ist. Der Logarithmus von b zur Basis a ist derjenige Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b) = {}^a\log b$$

Beispiel: Berechne x

$$5^x = 125$$

$$x = {}^5\log 125 = 3$$

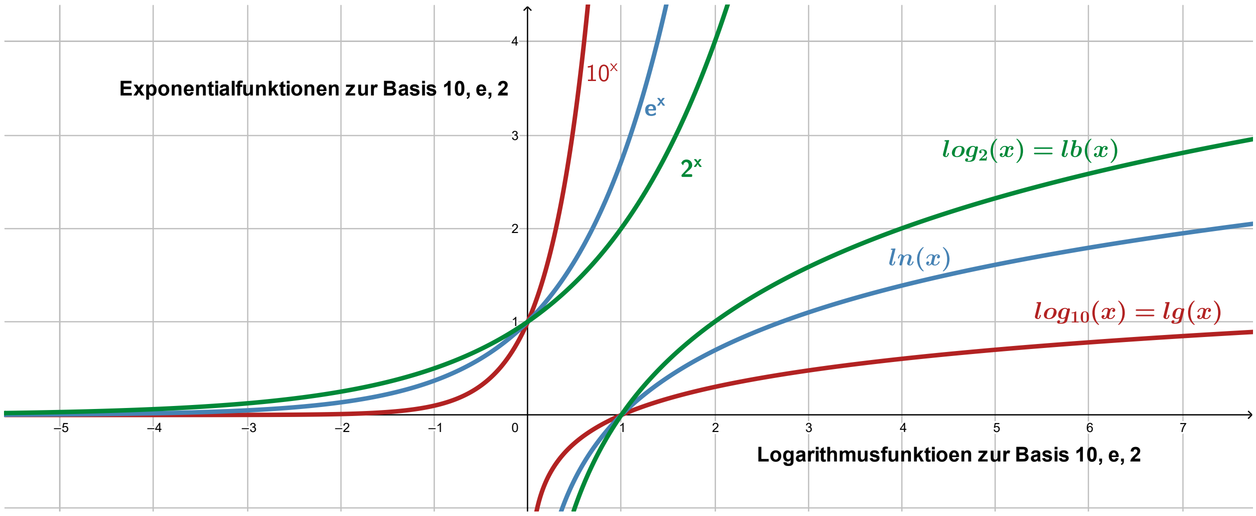
Es werden **folgende äquivalente Schreibweisen** für **Logarithmen** verwendet

$${}^a\log b = \log_a b = \log_a(b)$$

Zusammenhang zwischen den Exponentialfunktionen und den allgemeinen Logarithmusfunktionen

Logarithmen sind die Umkehrfunktion zu Exponentialfunktionen. Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x \text{ mit } a \neq 1$ bildet das Intervall des Definitionsbereichs $]-\infty, \infty[$ streng monoton auf das Intervall des Wertebereichs $]0, \infty[$ ab. Daher existiert eine Umkehrfunktion $g(x)$, genannt Logarithmus zur Basis a, welche das Intervall des Definitionsbereichs $]0, \infty[$ auf das Intervall ihres Wertebereichs $]-\infty, \infty[$ stetig abbildet.

Für dieses Werk nehmen wir u.a. §40f und §6 UrhG in Anspruch.
Es darf unentgeltlich weitergegeben, aber nicht verändert werden.



Bezeichnungen beim Logarithmieren

Ein Logarithmus wird durch seine Basis und seinen Numerus bestimmt. Für die Basis sind 10, die eulersche Zahl e und 2 üblich.

$x = {}^a\log b$	x ist der Logarithmus von b zur Basis a
a	Basis
b	Numerus
x	Logarithmuswert

Praktischer Nutzen von Logarithmen

Logarithmen sind in der Wissenschaft und Technik weit verbreitet. Sie ermöglichen

- große Zahlenbereiche mittels logarithmischer Skalen kompakt darzustellen
- einfache Lösungen für Gleichung mit Exponentialfunktionen, indem man beide Seiten der Gleichung logarithmiert
- Intensitäten und Verhältnisse, wie die Lautstärke, den pH-Wert, den Signal-zu-Rauschabstand anschaulich auszudrücken
- exponentielles Wachstum als linearen Anstieg darzustellen.
  $y = a \cdot e^{k \cdot t} \quad |\ln$
  $\ln(y) = \ln(a) + k \cdot t$
- den Grad von Gleichungen zu senken (Potenzieren → Multiplizieren; Multiplizieren → Addieren). Diese Rechenerleichterung erlaubte vor der Erfindung des Computers eine dramatische Vereinfachung und Reduzierung von Rechenfehlern bei Berechnungen in der Astronomie und in der Navigation), erforderte aber den Einsatz von vorab erstellten, von der konkreten Aufgabenstellung unabhängigen, Logarithmustafeln bzw. eines Rechenschiebers.

Für dieses Werk nehmen wir u.a. §40f und §6 UrhG in Anspruch.
Es darf unentgeltlich weitergegeben, aber nicht verändert werden.

Unterscheidung von Logarithmen nach deren Basis

Es ist möglich die Basis vom Logarithmus frei zu wählen. Es ist aber üblich für die Basis entweder 10, die Eulersche Zahl e, oder 2 zu wählen

${}^{a}\log b = \log_a(b)$	Der allgemeine Logarithmus von b zur beliebigen Basis a
${}^{10}\log b = \lg(b) = \log(x) = \log_{10}(x)$	Der dekadische Logarithmus hat die Zahl a=10 als Basis
${}^{e}\log b = \ln(b)$	Der natürliche Logarithmus hat die Zahl a=e=2,71828 als Basis
${}^{2}\log b = \mathrm{lb}(b)$	Der binäre Logarithmus hat die Zahl a=2 als Basis

Alle Logarithmusfunktionen sind unabhängig von ihrer Basis proportional zueinander und unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor. In der Praxis kommt nur der dekadische Logarithmus zur Anwendung, daher lässt man mitunter die Bezeichnung 10 für die Basis weg oder schreibt lg.
Spricht man von Exponentialfunktionen, so hat die natürliche Exponentialfunktion zur Basis e eine überragende Bedeutung. Ihre Umkehrfunktion, der natürliche Logarithmus ln(x), ist in der Schreibweise deutlich von log(x) zu unterscheiden.

Allgemeiner Logarithmus von b zur Basis a

Der Logarithmus von b zur Basis a ist jener Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten. Diese Form vom Logarithmus ist zwar allgemein, hat aber kaum praktische Bedeutung im Vergleich um dekadischen und zum natürlichen Logarithmus.

$$ {}^{a}\log b = x \Leftrightarrow a^x = b $$
$$ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; b \in \mathbb{R}^+ $$

${}^{a}\log b = \log_a b$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $b^x = a$. Den Zahlenwert vom allgemeinen Logarithmus, für den es keine Logarithmentafeln aber auch keine separate Taste am Taschenrechner gibt, kann man berechnen, indem man den Logarithmus vom Numerus b durch den Logarithmus der Basis a dividiert.

$$ {}^{a}\log b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\mathrm{lb}(b)}{\mathrm{lb}(a)} $$

Beispiel:

$$ {}^{2}\log 16 = x $$

... folgende Umrechnung vereinfacht die Berechnung, sollte man keinen modernen Taschenrechner zur Hand haben:

$$ x = \frac{\ln 16}{\ln 2} = \frac{\lg 16}{\lg 2} = \frac{\mathrm{lb}(16)}{\mathrm{lb}(2)} = 4 $$

Für dieses Werk nehmen wir u.a. §40f und §6 UrhG in Anspruch.
Es darf unentgeltlich weitergegeben, aber nicht verändert werden.

Natürlicher Logarithmus

Der natürliche Logarithmus hat die Eulersche Zahl e=2,71828 als Basis.
Der Logarithmus naturalis ln(x) ist die Umkehrfunktion der Eulerschen Funktion e^x. Beide Funktionen kommt in den Ingenieurwissenschaften auf Grund der Eulerschen Formel zentrale Bedeutung zu.

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

Die eulersche Formel stellt das Bindeglied zwischen den komplexen Zahlen und den Winkelfunktionen her, indem sie für einen vorgegebenen Winkel φ eine Verknüpfung herstellt zwischen der Exponentialfunktion e mit dem imaginären Exponenten i einerseits und mit den trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus andererseits.

$$\text{Basis} = \text{e: } \log_e(b) = \ln(b)$$
$$D_f = \mathbb{R}^+$$
$$W_f = \mathbb{R}$$
$$\ln(0) \ldots \text{ nicht definiert}$$
$$\ln(1) = 0$$
$$\ln(e) = 1$$

Dekadischer Logarithmus

Der dekadische Logarithmus hat die Zahl 10 als Basis und da wir mit einem 10-er System rechnen, wurde er früher bevorzugt durch umfangreiche Logarithmentafeln unterstützt.

$$\text{Basis} = 10\text{:} {}^{10}\log b = \lg b$$

Es ist zweckmäßig für die Basis b=10 zu wählen, denn dann kann man Logarithmen mit beliebiger Basis leicht berechnen.

$${}^{b}\log x = {}^{a}\log x \cdot {}^{b}\log a \Leftrightarrow {}^{a}\log x = \frac{{}^{b}\log x}{{}^{b}\log a}$$

Wichtige Werte:

$$\log_{10}(1) = 0$$
$$\log_{10}(10) = 1$$
$$\log_{10}(100) = 2$$
$$\log_{10}(1.000) = 3$$

Für dieses Werk nehmen wir u.a. §40f und §6 UrhG in Anspruch.
Es darf unentgeltlich weitergegeben, aber nicht verändert werden.

Zusammenhang dekadischer Logarithmus und natürlicher Logarithmus

Bei der Umrechnung vom dekadischen auf den natürlichen Logarithmus erfolgt ein Wechsel der Basis von 10 auf e=2,718

$$^{a}\log x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Binärer Logarithmus

Der binäre Logarithmus hat die Zahl 2 als Basis.

$$\text{Basis} = 2\text{:}\ {}^{2}\log b = \mathrm{lb}(b)$$

In der Informatik werden Daten in Form von Binärzahlen dargestellt, wobei jedes Bit entweder den Wert 0 oder 1 annehmen kann. Der binäre Logarithmus wird verwendet, um die Anzahl der Bits zu bestimmen, die benötigt werden, um einen bestimmten maximalen dezimalen Zahlenbereich binär darzustellen. Zum Beispiel benötigt die Darstellung vom dezimalen Zahlenbereich 0 .. 255, also 256 verschiedene Zustände, 8 Bit.

Beispiel

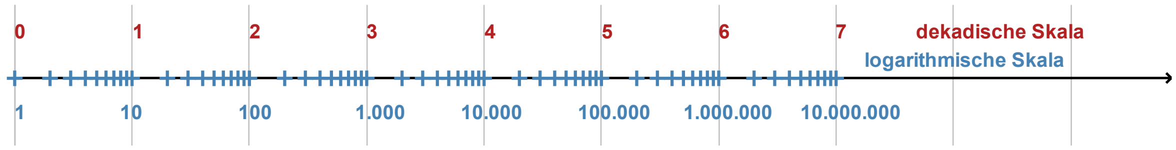
$$\mathrm{lb}(256) = 8$$

Logarithmentafeln

Logarithmentafeln waren vor der Verbreitung von Computer Algebra Systemen (CAS) ein wichtiges Werkzeug der Mathematik und der Naturwissenschaften. Dabei handelt es sich um vorab berechnete Tabellen, welche die Werte von Logarithmen, vorzugsweise von dekadischen oder natürlichen Logarithmen, für verschiedene Zahlen enthalten. Indem man in diesen Tabellen den Wert von x sucht, kann man den entsprechenden Logarithmus lg(x) bzw. ln(x) ablesen und umgekehrt. Dies erleichterte komplexe Berechnungen, insbesondere bei Multiplikationen, Divisionen, Potenzierung und beim Wurzelziehen, so wie sie in der Astronomie und der Navigation häufig vorkommen. Heute erledigen CAS diese Aufgabe.

Logarithmische Skala

Logarithmische Skalen werden verwendet, wenn der Wertebereich der darzustellenden Größe viele Zehnerpotenzen umfasst. Auf einer logarithmischen Skala werden Werte, die sich in gleichen Zeiträumen verzehnfachen als Gerade dargestellt. Kleine Werte sind genauer ablesbar als große Werte.



Für dieses Werk nehmen wir u.a. §40f und §6 UrhG in Anspruch.
Es darf unentgeltlich weitergegeben, aber nicht verändert werden.

Dabei ergibt 10 hoch dem dekadischen Wert den entsprechenden logarithmischen Wert.

$$\begin{aligned}
10^0 &= 1 \\
10^1 &= 10 \\
10^2 &= 100 \\
&: \\
10^7 &= 10.000.000
\end{aligned}$$

Beispiele für logarithmische Skalen:

- Lautstärken misst man in Dezibel, wobei der leiseste hörbare Ton mit 0dB definiert ist. Ein 10-mal größerer Schalldruck ist mit 10dB definiert und ein 100-mal größerer Schalldruck ist mit 20 dB definiert....
- Das Spektrum elektromagnetischer Wellen reicht von 10^0 Hz bis 10^{23} Hz.
- Aktienkurse, die alle 10 Jahre ihren Wert verzehnfachen, haben einen linear verlaufenden Graph, wenn die Zeitachse linear und die Werteachse logarithmisch beschriftet ist.
- Potenzfunktionen werden als Gerade dargestellt, wenn sowohl die x- als auch die y-Achse logarithmisch beschriftet sind.

Für dieses Werk nehmen wir u.a. §40f und §6 UrhG in Anspruch.
Es darf unentgeltlich weitergegeben, aber nicht verändert werden.